معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول المتجانسة: (هاااامة)

أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي التالي: $u(x,0) = \varphi(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

تطبيق: أوجد حل المعادلة السابقة في حالة: $f(x,t) = x^2 e^{\frac{1}{2}x}$, $a=1$.

الحل:

سوف نبحث عن حل محدود للمسألة المعطاة وغير صفري من الشكل:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

علماً أنَّ $X(x)$ دالة تابعة لـ x فقط، $T(t)$ دالة تابعة لـ t فقط ، نشتق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$u_t(x,t) = X(x).T'(t)$$
$$u_{xx}(x,t) = X''(x).T(t)$$

نعوض صيغ هذه المشتقات في المعادلة (1) فنجد أنَّ:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

علماً أنَّ λ^2 هو بارامتر الفصل.

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

بالحل المشترك للمعادلتين (4) , (5) وبالعودة للعلاقة (3) نحصل على الحلول الخاصة لـ (1) من الشكل التالي:

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ A , B ثوابت متعلقة بالمتحول λ ، وبمكاملة العلاقة (6) بالنسبة للمتحول λ نحصل على الحل العام للمعادلة (1) من الشكل التالي:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right] d\lambda \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

وذلك بفرض أنَّ التكامل متقارب ، ويمكن اشتقاق المقدار الموجود تحت عبارة التكامل مرَّة واحدة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x.

نختار $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ بحيث تحقق العلاقة (7) الشرط الابتدائي (2) فنحصل على:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right] d\lambda \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

وبمقارنة التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (8) مع تكامل فورييه للدالة $\varphi(x)$ نحصل على:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(\lambda\xi)\,d\xi \quad , \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi$$

نبدل $B(\lambda)$, $A(\lambda)$ بما تساويها في العلاقة (7) وبتغيير ترتيب التكامل نحصل على الحل بالشكل:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\left[\lambda(\xi-x)\right]d\lambda\right]d\xi \cdots\cdots\cdots(9)$$

إنَّ التكامل الداخلي في العلاقة (9) يمكن اختصاره بالفعل بفرض أنَّ:

$$a\lambda\sqrt{t}=z \qquad , \ \lambda(\xi-x)=\mu z$$

ومن هنا نجد أنَّ:

$$\lambda=\frac{z}{a\sqrt{t}} \qquad , \qquad d\lambda=\frac{dz}{a\sqrt{t}} \qquad , \ \mu=\frac{(\xi-x)}{a\sqrt{t}}$$

ومن ثمَّ نجد أنَّ:

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\left[\lambda(\xi-x)\right]d\lambda=\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos(\mu z)\frac{dz}{a\sqrt{t}}=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos(\mu z)\,dz=\frac{1}{a\sqrt{t}}J(\mu)$$

علماً أنَّ:

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos(\mu z)\,dz=J(\mu)$$

نفاضل المساواة الأخيرة بالنسبة لـ μ فنحصل على:

$$J'(\mu)=\int_{0}^{+\infty}(-z)e^{-z^2}\sin(\mu z)\,dz$$

وبمكاملة الطرف الأيمن من هذه المساواة بالتجزئة نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية:

$$J'(\mu)=-\frac{\mu}{2}J(\mu)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة، وبالمكاملة نحصل على:

$$J(\mu)=Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

لتحديد قيمة الثابت C نضع $\mu=0$ في العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$C=J(0)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ \Rightarrow C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومنه فإنَّ التكامل المطلوب حسابه يأخذ الشكل:

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\left[\lambda(\xi-x)\right]d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

وبتعويض التكامل الأخير في العلاقة (9) نصل إلى التعبير التكاملي عن الحل المطلوب:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\ \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

التطبيق:

$$u_t = u_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0) = x^2 e^{\frac{1}{2}x} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

لقد وجدنا أنَّ حل المسألة المعطاة يعطى وفق الدستور التالي:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإنَّ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{\frac{1}{2}\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}+\frac{1}{2}\xi} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

إن الأس للدالة الأسية الموجودة ضمن التكامل الأخير يكتب بالشكل:

$$-\frac{(\xi-x)^2}{4t} + \frac{1}{2}\xi = -\frac{(\xi-x)^2}{4t} + \frac{2\xi t}{4t} = -\frac{\left(\xi^2 - 2\xi x + x^2 - 2\xi t\right)}{4t} = -\frac{\left(\xi^2 - 2\xi(x+t) + x^2\right)}{4t}$$

$$= -\frac{\left[\xi^2 - 2\xi(x+t) + (x+t)^2\right]}{4t} + \frac{(x+t)^2 - x^2}{4t} = -\frac{\left[\xi - (x+t)\right]^2}{4t} + \frac{x^2 + 2xt + t^2 - x^2}{4t}$$

$$= -\frac{\left[\xi - (x+t)\right]^2}{4t} + \frac{2xt + t^2}{4t} = -\frac{\left[\xi - (x+t)\right]^2}{4t} + \frac{x}{2} + \frac{t}{4}$$

وبالتالي فإن التكامل الأخير يكتب بالشكل:

$$I_1 = e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{\left[\xi-(x+t)\right]^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - (x+t)}{2\sqrt{t}} = z \;\Rightarrow\; \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz \quad , \quad \xi = (x+t) + 2\sqrt{t}\,z \quad , \quad \begin{cases} \xi = -\infty \;\Rightarrow\; z = -\infty \\ \xi = +\infty \;\Rightarrow\; z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x+t) + 2\sqrt{t}\,z\right]^2 e^{-z^2} dz =$$

$$= (x+t)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz + 4\sqrt{t}\,(x+t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-z^2} dz}_{=0} + 4t \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz$$

$$= (x+t)^2 \left(\sqrt{\pi}\right) + 0 + 4t\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}\left[(x+t)^2 + 2t\right]$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

$$I_1 = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2 + 2t\right]$$

وبالتالي فإنَّ الحل المطلوب هو:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2 + 2t\right] = e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2 + 2t\right]$$